EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966

II — 1 OKTOBER 1965

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

OPMERKINGEN OVER DE VERZAMELINGENTHEORETISCHE TOPOLOGIE[1]

door

P. C. BAAYEN

Amsterdam

1. *Metrische ruimten*

Tweeërlei soort stimuli zijn bepalend geweest voor het ontstaan van de topologie, en zij zijn nog steeds van groot belang: enerzijds impulsen vanuit de meetkunde, anderzijds invloeden vanuit de analyse.

Dit geldt voor het hele terrein van de topologie. Dit geldt ook voor dat speciale gebied, dat bekend staat als verzamelingentheoretische, of algemene, of analytische topologie.

In deze voordracht zullen wij ons uitgangspunt kiezen in de analyse. Maar ook de meetkunde zal vertegenwoordigd zijn, in verschillende voorbeelden, die vooral in § 3 aan bod zullen komen.

Laten we beginnen met een vertrouwd begrip: dat van continuïteit van een reële functie. De definitie is u allen bekend: een reële functie f van één reële variabele heet continu in het punt x_0 indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ zodra maar $|x - x_0| < \delta$.

Eveneens bekend is de generalisatie tot functies van meer variabelen. Gemakshalve beperken we ons even tot reële functies f van twee variabelen. Zo'n functie heet continu in het punt $x = (x_1, x_2)$ indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)| < \varepsilon$ zodra $y = (y_1, y_2)$ voldoet aan $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < \delta$. Er is ook een concurrerende definitie, waarin de laatste clausule vervangen is door „zodra $y = (y_1, y_2)$ voldoet aan $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} < \delta$"; u weet, en u kunt gemakkelijk aantonen, dat beide definities leiden tot één en hetzelfde begrip continuïteit. Op dit verschijnsel komen we later nog terug.

In het voorgaande spraken we van „het punt $x = (x_1, x_2)$"; d.w.z. we vatten de beide variabelen samen tot één variabel punt. Dit is natuurlijk een vertrouwd procédé, bekend o.a. uit de analytische

1) Voordracht Vakantiecursus 1963, Mathematisch Centrum.

meetkunde. Eveneens is de uitdrukking $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ons uit de analytische meetkunde bekend, nl. als de *afstand* tussen de punten $x = (x_1, x_2)$ en $y = (y_1, y_2)$.

Welbeschouwd komen de definities van continuïteit van functies van één of van twee variabelen dus op hetzelfde neer (zoals we ook wel konden verwachten, gezien het gebruik van dezelfde term „continu"): de afstand tussen twee functiewaarden, gemeten op de (aritmetische) euclidische rechte, moet klein worden (kleiner dan een willekeurig voorgegeven $\varepsilon > 0$), zodra de afstand tussen de argumenten klein genoeg is (kleiner dan een geschikte $\delta > 0$).

Het is M. FRÉCHET geweest die het formalisme dat hierachter zit uitkristalliseerde in een nieuw, abstract begrip: het begrip metrische ruimte (zie [5] en [6]).

Definitie 1. Een *metrische ruimte* bestaat uit een verzameling M — de elementen ervan zullen we *punten* noemen — en een *afstand* gedefinieerd in M; d.w.z. aan ieder tweetal punten x, y van M is toegevoegd een reëel getal $\rho(x, y)$, de afstand van x tot y. De afstandsfunctie ρ voldoet daarbij aan de volgende voorwaarden: als $x, y, z \in M$, dan:

(i) $\rho(x, y) = 0$ dan en slechts dan indien $x = y$;
(ii) $\rho(x, y) + \rho(x, z) \geqq \rho(y, z)$.

Een afstandsfunctie ρ heet ook wel een *metriek*.

Beide voorwaarden zijn acceptabel, ja onvermijdelijk, als we uitgaan van ons vertrouwde afstanden. Voorwaarde (i) zegt dat de afstand van een punt tot zichzelf nul is, en dat twee punten waartussen de afstand nul is samenvallen. Voorwaarde (ii) komt overeen met het feit dat de som van twee zijden van een driehoek niet kleiner kan zijn dan de derde zijde.

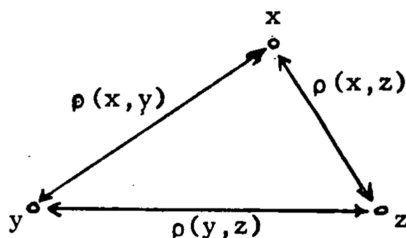


fig. 1

De voorwaarden (i) en (ii) hebben ook vertrouwenwekkende consequenties. Als men b.v. in (ii) z gelijk neemt aan y, dan vindt men:

$2\rho(x, y) \geqq 0$ (want volgens (i) is $\rho(y, y) = 0$) en dus $\rho(x, y) \geqq 0$: negatieve afstanden komen niet voor (zoals we toch mogen verlangen). Als men in (ii) $z = x$ neemt, dan vindt men (rekening houdend met (i)) dat $\rho(x, y) \geqq \rho(y, x)$. Daar x en y willekeurig zijn, zal evenzeer gelden $\rho(y, x) \geqq \rho(x, y)$. Bijgevolg is $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, d.w.z. de afstand van x tot y is gelijk aan de afstand van y tot x, hetgeen weer alleszins redelijk is.

Een standaardvoorbeeld van een metrische ruimte hebben we al ontmoet; daar zijn we immers van uit gegaan: de n-dimensionale euclidische ruimte E_n. De punten van deze ruimte zijn de geordende n-tallen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ van reële getallen. De afstand in E_n is gedefinieerd door

$$\rho(x, y) = \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Als we spreken over „de metrische ruimte E_n", dan bedoelen we altijd de verzameling E_n, voorzien van de metriek (1).

Een ander voorbeeld verkrijgen we als volgt. Zij M de verzameling van alle riemann-integreerbare reële functies op een (begrensd) segment $[a, b]$. Als $\phi, \psi \in M$, dan zij

$$\rho(\phi, \psi) = \sup_{a \leqq x \leqq b} |\phi(x) - \psi(x)|. \quad (2)$$

Dan voldoet ρ aan de voorwaarden (i) en (ii), en dus is (M, ρ) een metrische ruimte.

Met nadruk merken we op dat de afstandsfunctie ρ essentieel deel uitmaakt van het begrip metrische ruimte (vandaar dat we spreken van "de metrische ruimte (M, ρ)"). Men kan b.v. in E_n naast de metriek (1) definiëren

$$\rho'(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \ldots, |x_n - y_n|\}. \quad (3)$$

Het is gemakkelijk na te gaan dat ook ρ' voldoet aan de voorwaarden (i), (ii); dus ook (E_n, ρ') is een metrische ruimte. *We beschouwen de metrische ruimten (E_n, ρ) en (E_n, ρ') als verschillend, ook al ligt aan beide dezelfde puntverzameling ten grondslag.*

De ons bekende definities van continuïteit laten zich nu onmiddellijk generaliseren tot functies f waarvan het argument een metrische ruimte M_1 doorloopt, terwijl de waarden liggen in een metrische ruimte M_2 (die eventueel met M_1 kan samenvallen). Een dergelijke functie noemt men ook wel *een afbeelding van M_1 in M_2*; notatie: $f : M_1 \to M_2$.

Definitie 2. Stel (M_1, ρ_1) en (M_2, ρ_2) zijn metrische ruimten. Een afbeelding f van M_1 in M_2 heet *continu in het punt $x_0 \in M$*, indien

bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ zodra maar $\rho_1(x, x_0) < \delta$.

De afbeelding f heet *continu* indien hij continu is in ieder punt van M_1.

Voorbeeld. Zij M de verzameling van alle riemann-integreerbare reële functies op het segment $[a, b]$, en zij de afstandsfunctie ρ in M gedefinieerd door (2). De afbeelding J van M in E_1, gedefinieerd door

$$J(\phi) = \int_a^b \phi(x)\,dx, \qquad \phi \in M, \tag{4}$$

is continu.

(Indien $\varepsilon > 0$ willekeurig gegeven is, dan geldt

$$\begin{aligned} |J(\phi) - J(\psi)| &= \left| \int_a^b \phi(x)dx - \int_a^b \psi(x)\,dx \right| \\ &\leqq \int_a^b |\phi(x) - \psi(x)|dx \leqq (b-a) \sup_{a \leqq x \leqq b} |\phi(x) - \psi(x)| \\ &= (b-a)\rho(\phi, \psi) < \varepsilon, \end{aligned}$$

zodra maar $\rho(\phi, \psi) < \varepsilon/(b-a)$.)

De volgende stelling is een eenvoudige consequentie van definitie 2.

Stelling 1. Stel (M_i, ρ_i) is een metrische ruimte, voor $i = 1, 2, 3$. Stel $f : M_1 \to M_2$ en $g : M_2 \to M_3$ zijn continu. Dan is de samengestelde afbeelding $g \circ f$ een continue afbeelding van M_1 in M_3.

$$M_1 \xrightarrow{\ f\ } M_2 \xrightarrow{\ g\ } M_3$$

M.a.w.: een continue functie van een continue functie is een continue functie.

(Opmerking. Met $g \circ f$ bedoelen we de functie die aan $x \in M_1$ toevoegt $g(f(x)) \in M_3$).

2. *Topologische eigenschappen en topologische ruimten*

Onder de continue functies waarmee men zich in de elementaire analyse bezig houdt nemen de strikt monotone een belangrijke plaats in. Een strikt monotone functie heeft immers een omkeerfunctie, en de omkeerfunctie van een continue monotone functie blijkt zelf weer continu te zijn.

In die continue omkeerbaarheid zijn topologen zeer geïnteresseerd. Zozeer zelfs, dat zij afbeeldingen met deze eigenschap het epitheton „topologisch'' toegekend hebben.

Definitie 3. Een afbeelding f van een metrische ruimte (M_1, ρ_1) op een metrische ruimte (M_2, ρ_2) heet een *topologische afbeelding*, indien voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

(a) f is continu;
(b) f is 1—1-duidig, bezit dus een omkeerafbeelding f^{-1};
(c) f^{-1} is een continue afbeelding van (M_2, ρ_2) op (M_1, ρ_1).

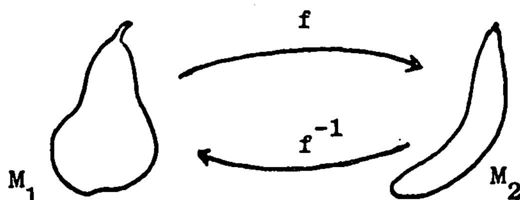


fig. 2

Beschouw nu nog eens E_n; zij ρ de gebruikelijke afstand (1), en zij ρ' de metriek (3). Zoals we reeds opmerkten in § 1 moeten we onderscheid maken tussen de metrische ruimten (E_n, ρ) en (E_n, ρ').

Zij nu i de identieke afbeelding op E_n : $i(x) = x$, voor alle $x \in E_n$. Dan is i omkeerbaar, en $i^{-1} = i$. De volgende bewering laat zich nu heel gemakkelijk bewijzen:

„de identieke afbeelding i is, als afbeelding van (E_n, ρ) op (E_n, ρ'), een topologische afbeelding".

Op dit feit (en mede op stelling 1) berust het verschijnsel dat het in de ε-δ-definitie van continuïteit van reële functies van meer variabelen geen verschil maakt of we van (1) ofwel van (3) uitgaan. Voor iemand die alleen geïnteresseerd is in continue afbeeldingen zijn ρ en ρ' gelijkwaardig. En dit is een algemeen verschijnsel: als we het begrip „topologische equivalentie van metrieken" vastleggen als in definitie 4, dan geldt steeds, dat topologisch equivalente metrieken aanleiding geven tot eenzelfde klasse van continue functies.

Definitie 4. Zij M een verzameling, en stel zowel ρ_1 als ρ_2 is een metriek in M. Dan heten ρ_1 en ρ_2 *topologisch equivalent* indien de identieke afbeelding, beschouwd als afbeelding van (M, ρ_1) op (M, ρ_2), een topologische afbeelding is.

Opmerking. Men hoede zich voor de gedachte dat twee metrieken in eenzelfde verzameling altijd topologisch equivalent zijn.

Voorbeeld. In E_n wordt een metriek ρ'' gedefinieerd door

$$\rho''(x, y) = 1 \text{ als } x \neq y; \qquad (5)$$
$$\rho''(x, x) = 0.$$

Iedere functie op (E_n, ρ'') is continu; dus ρ'' is niet equivalent met ρ of ρ'.

Definitie 5. Een *topologische eigenschap* is een eigenschap die bewaard blijft onder topologische afbeeldingen.

We zien uit het bovenstaande dat een begrip als afstand niet topologisch is. Een ander voorbeeld van een niet-topologische eigenschap is *begrensdheid.*

Als (M, ρ) een metrische ruimte is, dan noemt men een deelverzameling A van M begrensd als er een $x_0 \in M$ en een reëel getal a bestaan zodanig dat $\rho(x, x_0) < a$ voor alle $x \in A$ (m.a.w. A is bevat in de ,,bol'' met middelpunt x_0 en straal a). Men weet dat in E_n (met de gebruikelijke metriek ρ, gedefinieerd door (1)) niet iedere verzameling begrensd is. Beschouw nu de functie σ, gedefinieerd als volgt:

$$\sigma(x, y) = \min \{\rho(x, y), 1\}. \tag{6}$$

Men kan gemakkelijk aantonen dat σ weer aan de axioma's voor een afstandsfunctie voldoet, dus een metriek is in E_n, en zelfs dat σ topologisch equivalent is met ρ. Maar in (E_n, σ) is iedere verzameling begrensd, met diameter $\leqq 1$.

Na deze negatieve voorbeelden willen we enkele eigenschappen beschrijven die *wel* topologisch zijn. In de eerste plaats noemen we het begrip *open verzameling.*

Zij (M, ρ) een metrische ruimte, en zij A een deelverzameling van M. Een punt $a \in A$ heet *inwendig punt* van A indien er een $\varepsilon > 0$ bestaat zodanig dat het hele ,,bolletje'' $\{x : \rho(x, a) < \varepsilon\}$ in A bevat is: $\rho(x, a) < \varepsilon \Rightarrow x \in A$. De deelverzameling A heet *open* als ieder punt van A een inwendig punt van A is.

Stelling 2. Stel (M_1, ρ_1) en (M_2, ρ_2) zijn metrische ruimten, $f : M_1 \to M_2$ is continu, en $A \subset M_2$ is open in (M_2, ρ_2). Dan is $f^{-1}(A)$ open in (M_1, ρ_1).

Bewijs. Zij a een willekeurig punt van $f^{-1}(A)$. Dan zal $f(a) \in A$; daar A open is, is $f(a)$ inwendig punt van A. Er is dus een $\varepsilon > 0$ zodanig dat $\rho_2(f(a), b) < \varepsilon \Rightarrow b \in A$. Nu is f continu; dus is er een $\delta > 0$ zodanig dat $\rho_1(a, x) < \delta$ impliceert $\rho_2(f(a), f(x)) < \varepsilon$. Combinerende vinden we: $\rho_1(a, x) < \delta \Rightarrow f(x) \in A, \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$. D.w.z. a is een inwendig punt van $f^{-1}(A)$. Daar a willekeurig was, volgt dat $f^{-1}(A)$ open is.

Gevolg: Open-zijn is een topologische eigenschap; m.a.w. als $f : (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$ een topologische afbeelding is, en $U \subset M_1$ is open in (M_1, ρ_1), dan is $f(U)$ open in (M_2, ρ_2).

Bewijs. f^{-1} is een continue functie; volgens stelling 2 is dus $(f^{-1})^{-1}(U)$ open in (M_2, ρ_2). Maar $(f^{-1})^{-1}U = f(U)$.

Als men de topologie zou willen definiëren (zoals soms gebeurt) als de studie van topologische eigenschappen, dan ziet men uit het bovenstaande dat er aan het begrip metrische ruimte allerlei kleeft dat niet topologisch interessant is.

Een nadere bezinning op definitie 2, rekening houdend met het bovenstaande, toont dan ook dat het begrip afstand niet essentieel is voor het vastleggen van continuïteit. Immers als men de afstandsfunctie vervangt door een andere, die ermee equivalent is, dan verandert daardoor het continuïteitsbegrip niet.

De essentie van definitie 2 is blijkbaar, vaag gezegd, het volgende: f is continu in x_0 indien $f(x)$ willekeurig dicht in de buurt van $f(x_0)$ komt indien x maar dicht genoeg in de buurt van x_0 wordt gekozen.

Dat „dicht in de buurt van" is in definitie 2 gepreciseerd m.b.v. een metriek. Er is echter een algemenere interpretatie van „in de buurt van" mogelijk, waarbij het afstandsbegrip geen rol speelt. In de axiomatisch opgezette theorie der „topologische ruimten" doet men dit vaak m.b.v. het begrip „open verzameling". We zagen boven dat het open zijn van een verzameling wel een topologische eigenschap is. Welnu, het is mogelijk gebleken om uitgaande van open deelverzamelingen een begrip topologische ruimte te definiëren dat zeer algemeen is, terwijl het toch leidt tot een zinvolle theorie die rijk is aan toepassingen.

Definitie 6. Een *topologische ruimte* bestaat uit een verzameling X, en een stelsel O van deelverzamelingen van X, *open deelverzamelingen* genaamd, dat aan de volgende voorwaarden voldoet:

(i) de lege verzameling $\emptyset$ is open; de hele ruimte X is open (i.e. $\emptyset \in O$, $X \in O$);
(ii) als A en B open zijn, dan is $A \cap B$ open;
(iii) als $(A_i)_{i \in I}$ een stelsel open verzamelingen is dan is $\bigcup_{i \in I} A_i$ open.

Wij zullen niet nader ingaan op de zin van deze voorwaarden, noch op hun consequenties: men zie daarvoor [9] of [11]. We volstaan met een aantal algemene opmerkingen.

In de eerste plaats kan men gemakkelijk nagaan dat de open verzamelingen in een metrische ruimte voldoen aan de drie voorwaarden van definitie 6. Op grond daarvan kan men een metrische ruimte ook als topologische ruimte beschouwen. Topologisch equivalente

metrieken blijken te leiden tot dezelfde open verzamelingen, dus tot dezelfde topologische ruimte.

In de tweede plaats willen we nog even terugkomen op ons uitgangspunt, het begrip continuïteit, en vermelden hoe de definitie hiervan wordt voor afbeeldingen tussen willekeurige topologische ruimten. Als (X, O) een topologische ruimte is, en $x \in X$, dan noemt men iedere open verzameling U die x bevat ook wel een *omgeving van* x. Analoog aan de definitie van continuïteit in de analyse of in metrische ruimten stelt men nu:

Definitie 7. Stel (X, O) en (X^*, O^*) zijn topologische ruimten, en zij f een afbeelding van X in X^*. Dan heet f *continu in* $x_0 \in X$ indien bij iedere omgeving U^* van $f(x_0)$ een omgeving U van x_0 bestaat zodanig dat $f(x) \in U^*$ zodra maar $x \in U$.

De functie f heet *continu* indien hij continu is in ieder punt van X.

Zonder bewijs (het bewijs is overigens niet moeilijk) vermelden we:

Stelling 3. Stel (X, O) en (X^*, O^*) zijn topologische ruimten, en zij f een afbeelding van X in X^*. Dan en slechts dan is f continu, indien $f^{-1}(U^*) \in O$ voor iedere $U^* \in O^*$. D.w.z. indien het inverse beeld van een open verzameling altijd open is.

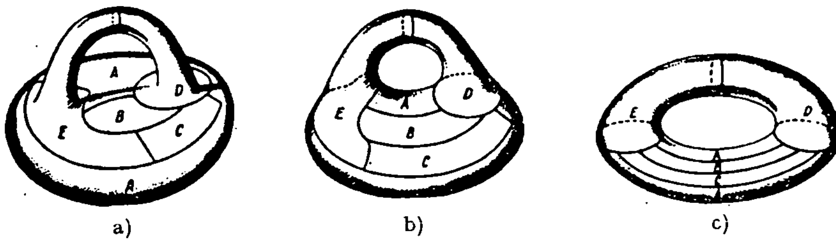
Men vergelijke deze stelling met stelling 2.

Een derde opmerking is de volgende: in plaats van uit te gaan van het begrip „open verzameling" ter definitie van een topologische ruimte, kan men ook het begrip „afsluiting" van een verzameling als primitief begrip nemen. Men kan dan komen tot een structuur die, ofschoon streng logisch-systematisch beschouwd verschillend van het begrip „topologische ruimte" uit def. 6, praktisch gezien daarmee equivalent is (zie b.v. [12]).

Tenslotte merken we op dat het begrip „topologische ruimte" essentieel wijder is dan het begrip „metrische ruimte": iedere metrische ruimte geeft aanleiding tot een topologische ruimte, maar niet iedere topologische ruimte is via een metrische ruimte te verkrijgen, is *metriseerbaar*. Het is zelfs zo dat in de moderne analyse (i.h.b. in de functionaalanalyse) niet-metriseerbare ruimten een belangrijker plaats beginnen in te nemen dan metriseerbare.

3. *Meetkundige illustratie*

In het voorgaande zagen we hoe de analytische topologie, opgevat als de theorie van de topologische ruimten, beschouwd kan worden als abstracte analyse. In deze paragraaf beschouwen we een aantal voorbeelden van topologische ruimten en van topologische en continue afbeeldingen, ontleend aan de meetkundige aanschouwing.



a) b) c)

fig. 3

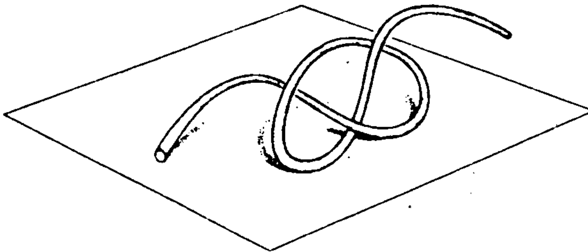
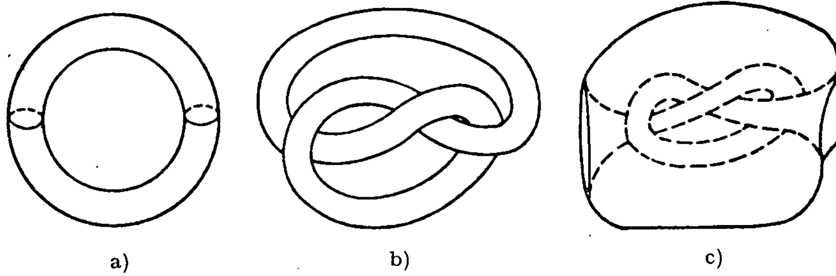


fig. 4. [1])



a) b) c)

fig. 5

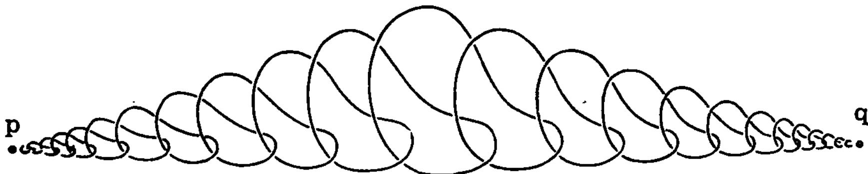


fig. 6[1])

---

[1]) J. C. Hocking en F. H. Young, *Topology* 1961, Addison — Wesley, Reading (Mass).

In al deze voorbeelden hebben we daarom te maken met *metrische* ruimten, meestal deelruimten van E_3.

Ter verduidelijking merken we het volgende op (gemakshalve ons beperkend tot metrische ruimten). Als (M, ρ) een metrische ruimte is, en A is een deelverzameling van M, dan kunnen we A weer als een metrische ruimte beschouwen; immers, A erft van M een afstandsbegrip. Op deze wijze kan men uit de voorbeelden van metrische ruimten, gegeven in § 1, i.h.b. uit de euclidische ruimten E_n, vele nieuwe soorten metrische ruimten winnen.

Bewijzen en exacte omschrijvingen laten we in deze paragraaf achterwege; we zullen juist geheel intuïtief te werk gaan.

Laten we eerst eens fig. 3 bezien. Bij a) zien we een bolvormig ding met een handvat, bij c) zien we een torus, een ringoppervlak, en de tussenfiguur b) laat zien hoe we a) door geleidelijke vervorming (via buigen en rekken en laten krimpen) kunnen overvoeren in c), en omgekeerd. Zo'n geleidelijke vervorming is een continue afbeelding (dit is zo'n bewering zonder nadere omschrijving en zonder bewijs); daar we van c) terug kunnen gaan tot a) hebben we met een continu omkeerbare afbeelding van doen, dus met een topologische afbeelding. De oppervlakken a) en c) zijn dus topologisch gelijkwaardig.

Zie vervolgens fig. 4, waar een dunne cilinder weergegeven wordt waarin een knoop is gelegd. Men ziet onmiddellijk dat men deze geknoopte cilinder door een continue vervorming uit de knoop kan halen, afbeelden kan op een gewone rechte cilinder. De deforformatie is weer continu omkeerbaar.

Uitgaande van dergelijke ervaringsfeiten heeft men de topologie wel eens beschreven als meetkunde op een rubberoppervlak. Topologische deformaties worden dan omschreven als vervormingen waarbij men wel mag buigen en vouwen en rekken en doen krimpen, maar waarbij men niet mag knippen of scheuren of plakken. Bij continue deformaties is knippen en scheuren evenmin toegestaan — immers hierbij haalt men punten die dicht in de buurt van elkaar liggen, abrupt uit elkaar — maar tegen plakken is geen bezwaar meer (de definities van een continue afbeelding sluiten geenszins uit dat twee verschillende punten hetzelfde beeld krijgen).

Deze omschrijvingen echter zijn te simplistisch en niet alleen uit plak-technische overwegingen, althans als we ons houden aan onze driedimensionale ervaringsruimte. Dat ziet u uit fig. 5. We kunnen de geknoopte cilinder uit fig. 4 sluiten tot een object als weergegeven in fig. 5b). We kunnen ook de cilinder van fig. 4 eerst uit de knoop halen en dan sluiten; dan verkrijgen we een ring als in

fig. 5a). De torus in fig. 5a) en de „geknoopte torus" in fig. 5b) zijn topologisch equivalent, en ze zijn beide equivalent met het oppervlak in fig. 5c), dat u een inwendig geknoopte torus zou kunnen noemen (u kunt zich dit oppervlak als volgt voorstellen: neem een fietsband, knip die eenmaal door, leg er een knoop in, en stulp dan een der losgeknipte uiteinden binnenstebuiten over de knoop heen. Daarna worden de knip-randen weer aan elkaar geplakt. Of ook (Bing [3]) als het oppervlak dat een aardappel begrenst waarin een worm een lusvormige gang geknaagd heeft). De drie oppervlakken in fig. 5 zijn topologisch equivalent, kunnen d.m.v. topologische transformaties in elkaar overgevoerd worden. Het is echter duidelijk dat zulks — althans in de E_3 — niet kan gebeuren door buigen en dergelijke, zonder knippen (iemand die gewend is zich in een vierdimensionale ruimte te bewegen zal er echter geen moeite mee hebben.

Er zijn topologen die zich speciaal met dit soort verschijnselen bezig houden: met de wijze waarop een op zichzelf beschouwd net object kan liggen in de euclidische ruimte. Zij zijn er in geslaagd de meest pathologische situaties te ontwerpen, waarbij vergeleken de knopen in fig. 5 kinderspel zijn. Neem bijvoorbeeld de kromme in fig. 6. Op eigen mérites beoordeeld is deze kromme topologisch gelijkwaardig met een gewoon lijnsegment; maar de wijze waarop dat lijnsegment in de ruimte gelegd is, is wel uitzonderlijk: als men een ringetje legt om een gewoon lijnsegment (of om een boog met een paar knopen, als in fig. 4), dan kan men die ring van het segment afschuiven (zoals men een ring van een vinger afschuift). Maar om de kromme van fig. 6 kan men ringetjes leggen die niet weggeschoven kunnen worden maar altijd blijven hangen, hetzij bij het punt p, hetzij bij het punt q.

Men zegt dat de kromme in figuur 6 *wild ingebed* is in de ruimte (een gewoon lijnsegment heet *tam ingebed*) en men spreekt ook van een *wilde boog*. Evenzo kan men de oppervlakken b) en c) in fig. 5 *wilde ringen* noemen. Een beroemd voorbeeld van een wild oppervlak, een *wilde bol*, is weergegeven in fig. 7: de *gehoornde bol van* Alexander. Men verkrijgt deze uit een tamme bol door een limietproces. Eerst trekt men uit die tamme bol twee slurven. Het ding blijft topologisch een bol. Uit elk van die twee slurven trekt men weer twee slurfjes. In elk stadium is het verkregen object topologisch equivalent met een bol, en ook in de limiet blijkt zulks het geval te zijn.

Als men in de ruimte een tam boloppervlak neemt, dan kan men elk ringetje dat met dat oppervlak geen punten gemeen heeft laten samenschrompelen tot een punt. In het geval van de gehoornde bol

van Alexander is zulks niet meer het geval: men kan een ringetje zó om één der slurven leggen dat het niet tot een punt kan samenkrimpen zonder daarbij het oppervlak te doorsnijden.

(Volledigheidshalve volgt nu de definitie van wilde inbedding. Als men van een object wil zeggen dat het *wild* ingebed is, moet men eerst afspreken *welke* copieën van dat object (bijvoorbeeld een boog, een bol of een ring) *tam* in de ruimte liggen. Een andere copie van datzelfde object heet nu *wild ingebed*, indien het niet mogelijk is deze copie tot een tam exemplaar te deformeren door een topologische afbeelding van de *hele* euclidische ruimte op zichzelf.)

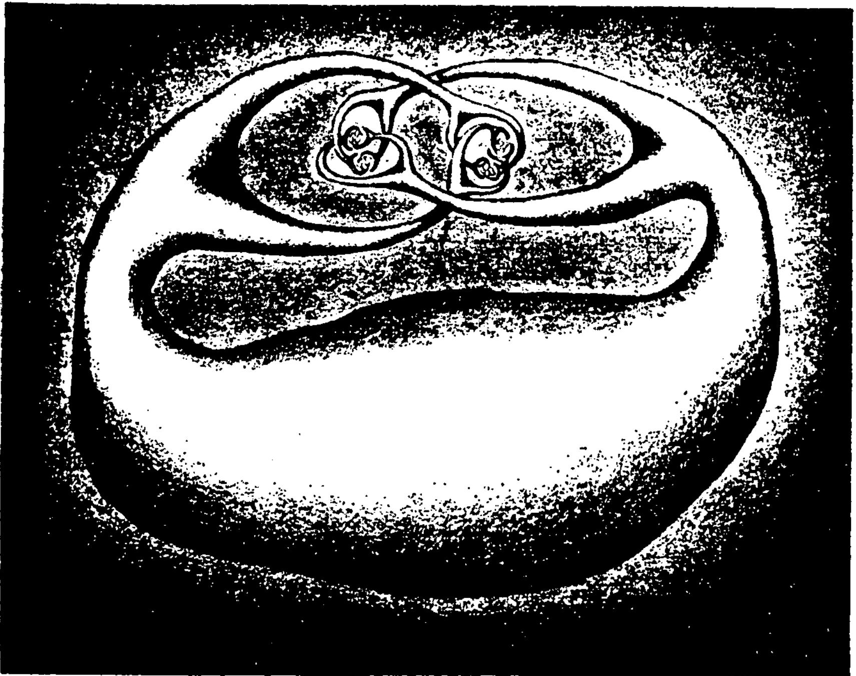


fig. 7 [1])

Tot slot willen we nog een aantal continue afbeeldingen beschouwen, en i.h.b. een aantal ruimten die ontstaan door continue vervorming van het gedeelte van het euclidische vlak dat begrensd wordt door een vierkant of rechthoek.

Een continu deformatieproces hoeft niet omkeerbaar te zijn; i.h.b. mogen verschillende punten hetzelfde beeld hebben. Zo kan men een vierkant continu afbeelden op een punt, of op een lijnstuk

[1]) zie noot blz. 41.

(verbazingwekkender is overigens, dat men een lijnstuk continu kan afbeelden op een vierkant; zie b.v. [7]). We zullen echter alleen die hoogst eenvoudige continue deformaties van het vierkant beschouwen, die worden verkregen door zijden van het vierkant aan elkaar te plakken; daarbij is het eindresultaat uiteraard weer een oppervlak.

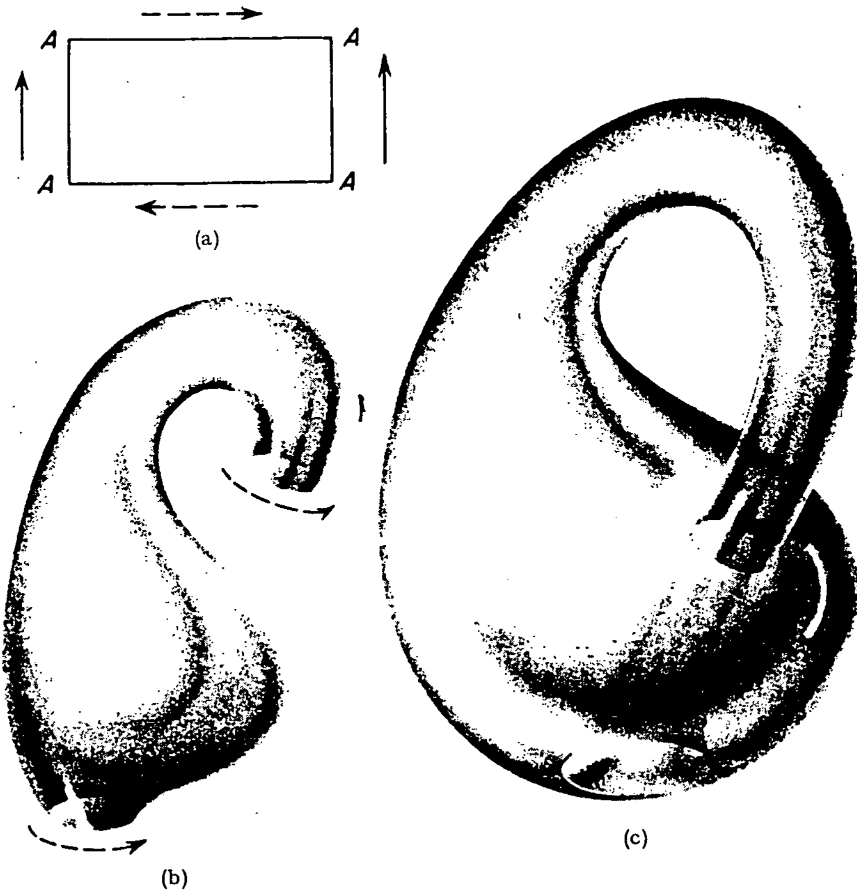


fig. 8 [1])

Neem fig. 9. In a) ziet u een vierkant, continu (en zelfs topologisch) gedeformeerd tot een rechthoek, een strook. Men kan nu de zijden AB en DC aan elkaar plakken (*identificeren* zegt de topoloog). Als men dat gewoon netjes doet krijgt men een cilinder (fig.

[1]) B. H. Arnold, *Intuitive Concepts in Elementary Topology*, © 1962, by permission of Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs (N.J.), U.S.A.

9c)). Evenals de strook heeft het cilinderoppervlak twee zijden. Het wordt begrensd door twee cirkels.

Als men echter in de strook a) eerst een slag maakt alvorens de uiteinden aan elkaar te plakken, dan krijgt U het oppervlak b), de *band van* Moebius. En dit is een zeer merkwaardig oppervlak, dat *niet topologisch equivalent* is met het cilinderoppervlak c): het heeft nl. slechts één zijde, en het wordt begrensd door slechts één (topologische) cirkel.

U kunt ook langs mechanische weg verifiëren dat de oppervlakken 9b) en 9c) niet topologisch equivalent zijn: als u 9c) doormidden knipt langs de stippellijn, dan houdt u twee cilindertjes over. Doet u hetzelfde bij 9b), dan blijkt u nog steeds één band te hebben, doch met meer slagen. Zie ook fig. 10a).

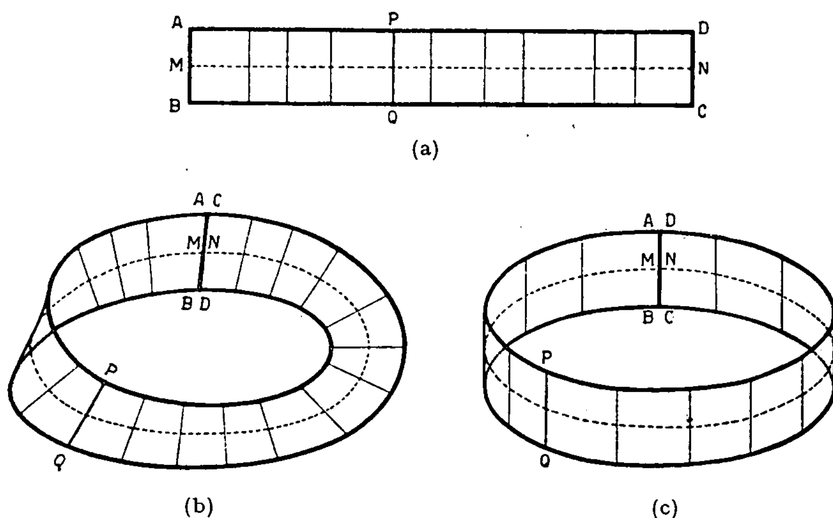


fig. 9

Als U de strook 9a) twee slagen geeft alvorens de korte uiteinden samen te plakken, dan krijgt u een oppervlak dat topologisch equivalent is met het cilinderoppervlak 9c), doch dat *wild* ingebed is in E_3 (zie fig. 10b)); bij middendoorknippen krijgt u twee banden, die ditmaal aan elkaar geschakeld zijn.

Uit een cilinderoppervlak kunt u een ringoppervlak krijgen door onder- en bovenrand van de cilinder aan elkaar te plakken. (Stelt u zich de cilinder dun en uitgerekt voor.) Uiteindelijk kunnen we dus een vierkant continu afbeelden op een ringoppervlak, door alleen maar zijden twee aan twee te identificeren.

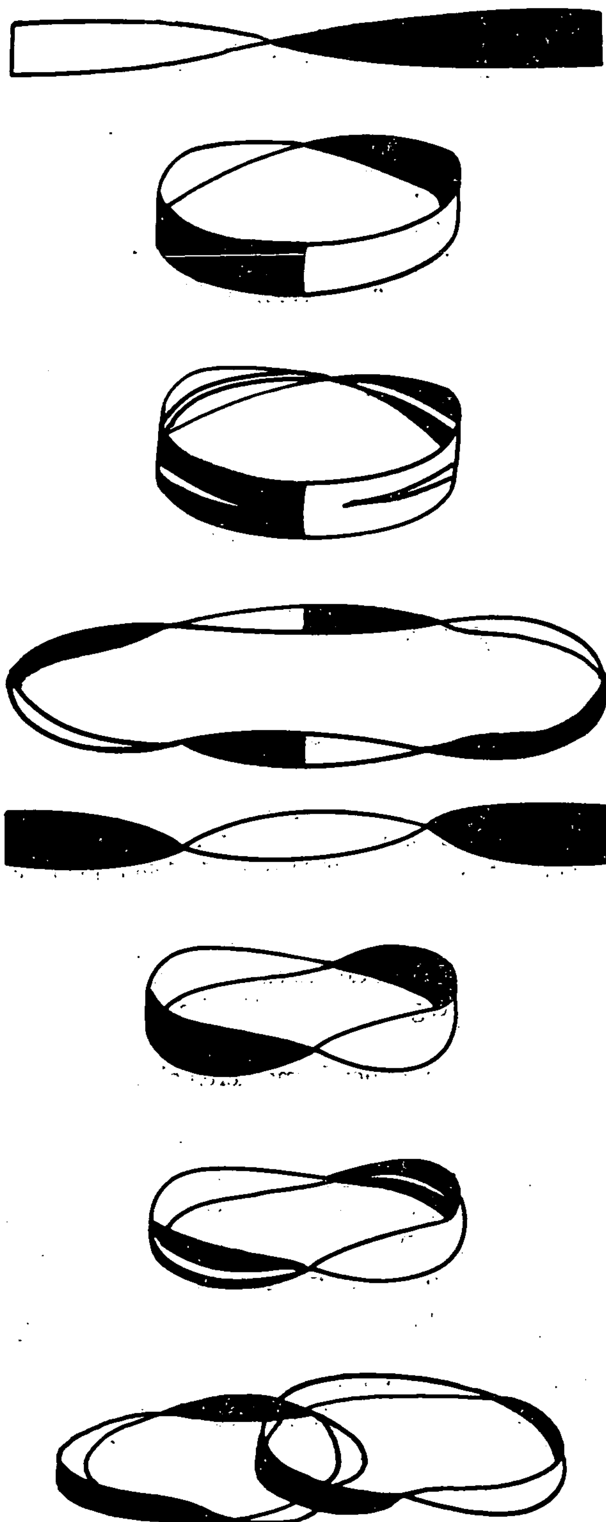


fig. 10

We kunnen een vierkant ook afbeelden op een boloppervlak, door weer zijden aan elkaar te plakken. Daartoe doet u er goed aan het vierkant eerst topologisch te deformeren tot een cirkel: zie fig. 11.

Een zeer merkwaardig plakresultaat is geïllustreerd in fig. 8. Men gaat uit van het vierkant (de rechthoek) 8a) en identificeert de opstaande zijden, zo komend tot een cilinder. De horizontale zijden worden de cirkelvormige randen van de cilinder. Als volgende stap wil men deze cirkels aan elkaar plakken, en ze daarbij zó op elkaar leggen dat de oriëntaties, als aangegeven door de gestippelde pijlen, overeenkomen (doet men dat niet, dan krijgt men het ringoppervlak).

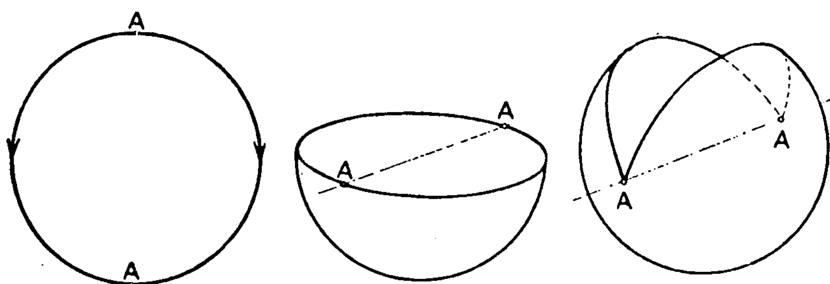
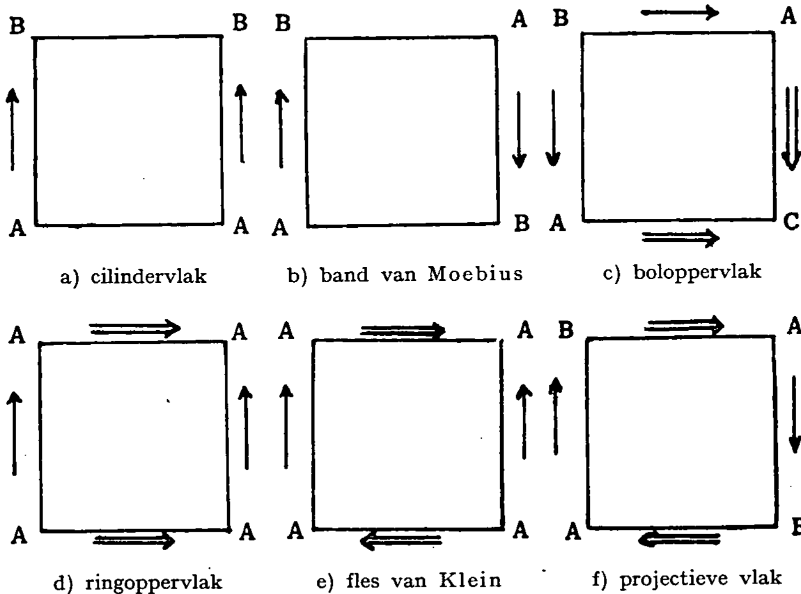


fig. 11

Deze laatste plakmanoeuvre blijkt in de drie-dimensionale ruimte niet uitvoerbaar; de bovenrand moet nl. van binnen uit op de benedenrand gelegd worden (fig. 8b)) en in de drie-dimensionale ruimte kan dat niet zonder doorboring van het cilinderoppervlak. In E_4 kan het echter wel, en dan krijgt men een oppervlak waarvan fig. 8c) een afschaduwing is: de *fles van* Klein. Evenals de moebiusband is dit een éénzijdig oppervlak; de fles van Klein heeft geen binnen- of buitenkant.

We hebben nu op verschillende manieren zijden van een vierkant geïdentificeerd. In fig. 12 wordt een overzicht gegeven; zijden waarnaast gelijksoortige pijlen aangebracht zijn worden geïdentificeerd, en wel zodanig, dat de pijlen in dezelfde richting op elkaar vallen. Punten, aangeduid met dezelfde letter, vallen daarbij samen.

Het geval van fig. 12f) hebben we nog niet behandeld. U kunt dit ook beschrijven door uit te gaan van een cirkelschijf, waarvan dan diametraal tegenover elkaar liggende randpunten geïdentificeerd worden. Vanuit die beschouwingswijze kan men inzien dat het resultaat van de deformatie volgens het plakpatroon van fig. 12f) topologisch equivalent is met het *projectieve vlak* (voor een uitvoeriger toelichting zie men het artikel van Prof. Freudenthal in [7]).



a) cilindervlak b) band van Moebius c) boloppervlak

d) ringoppervlak e) fles van Klein f) projectieve vlak

fig. 12

Overigens is het plakprocédé, aangegeven door 12f), technisch weer niet-uitvoerbaar: evenals de fles van Klein kan het projectieve vlak niet worden ingebed in de driedimensionale euclidische ruimte.

4. *Nawoord en literatuuropgave*

De tijd, uitgemeten voor deze voordracht, maakt het niet mogelijk dieper in te gaan op de aangestipte onderwerpen.

De inhoud van deze voordracht is inhomogeen. Enerzijds kwamen we via de gewone analyse en het begrip metrische ruimte tot de definitie van abstracte topologische ruimten, waarbij het begrip „continu" de continuïteit moest geven; maar aan de grens van het beloofde land keerden wij ons af en gingen we concrete krommen en oppervlakken beschouwen, gelegen in de driedimensionale of hoogstens vierdimensionale ruimte.

Deze inhomogeniteit is inhaerent aan de topologie. Het terrein van het topologisch onderzoek is dermate uitgebreid en dermate gevarieerd, dat het niet mogelijk is in kort bestek een overzicht te geven, terwijl ieder overzicht, hoe uitgebreid ook, aan vele onderwerpen en problemen tekort zal doen of zelfs stilzwijgend voorbij zal gaan.

In deze voordracht hebben we ons bezig gehouden met de „verzamelingtheoretische" topologie; het zeer uitgebreide en belangrijke

deel van de topologie dat als algebraïsch te boek staat is immers reeds aan de orde gekomen in de voordracht van Prof. Van Est. Er moet echter worden opgemerkt dat de scheiding tussen algebraïsche en analytische topologie vaag en onbepaald is; zo worden de objecten uit § 3 evenals de wijze waarop zij in de E_3 ingebed zijn, in belangrijke mate juist met de methoden der algebraïsche topologie bestudeerd.

Om een indruk te geven van de ontoereikendheid van het hier gezegde volgt nu nog een summiere en verre van volledige opsomming van gebieden van onderzoek die deel uitmaken van de algemene topologie.

Om te beginnen is er de studie van topologische ruimten. Een algemene definitie van topologische ruimten is gegeven in § 2; de voorwaarden, door deze definitie opgelegd aan het stelsel O der open verzamelingen, kan men gaan aanvullen om uit de grote categorie der topologische ruimten speciale ruimten, met voor bepaalde toepassingen prettige eigenschappen, af te zonderen. Hierbij is vaak de analyse bron van inspiratie geweest (de naamkeuze „reguliere ruimten", „normale ruimten", „volledig normale ruimten" e.a. wijzen op een neiging om de euclidische ruimte normatief te stellen) en belangrijke begrippen als *compactheid* en *samenhang* zijn regelrecht aan de analyse ontleend (resp. aan de stellingen van Bolzano-Weierstrasz en van Heine-Borel, en aan de tussenwaardestelling). De studie van het verband tussen al deze voorwaarden en eigenschappen, en van de methoden om nieuwe ruimten te construeren uit een aantal gegeven exemplaren, vult lijvige handboeken.

We noemden het begrip „metrische ruimte" en merkten op dat „afstand" geen topologisch invariante zaak is. Desondanks dient de theorie der metrische ruimten tot de topologie gerekend te worden. Overigens is metriseerbaarheid van een ruimte *wel* een topologische invariant, en de vraag naar de karakterisering van alle metriseerbare topologische ruimten, die tientallen jaren niet bevredigend kon worden beantwoord (pas in 1950 werd dit probleem afgesloten, en wel onafhankelijk door J. Nagata, R. H. Bing en Yu. M. Smirnov) heeft lange tijd bevruchtend gewerkt op het topologisch onderzoek.

Voorts vermelden we de theorie der uniforme structuren, die bij wijze van spreken een tussenstadium vormen tussen metrische ruimten en topologische ruimten, en die juist rijk genoeg zijn om het begrip *uniforme continuïteit* erin te kunnen definiëren (dat kan bij willekeurige topologische ruimten niet); de theorie der compactificaties; de belangrijke *dimensie-theorie*. In het randgebied van

algemene en analytische topologie bevindt zich de *homotopie-theorie,* waarin men continue deformaties bestudeert, niet zozeer van topologische ruimten, als van continue afbeeldingen tussen topologische ruimten.

Daarnaast moet de *topologische algebra* genoemd worden (die men vooral niet moet verwarren met de algebraïsche topologie); de studie van topologische groepen of ringen, topologische vectorruimten of netwerken, e.d. Andere raakvlakken van topologie en algebra vindt men in de theorie van de ringen van continue functies, en in de dualiteitstheorie voor boole-algebra's.

Bovenstaande lijst zou nog veel langer gemaakt kunnen worden; maar waarschijnlijk is hij U reeds te lang, en ik zou U niet de moed willen ontnemen en U niet willen afschrikken van een nadere kennismaking van dit vak, dat U zal fascineren, van welke kant U het ook benadert.

Voor diegenen, die zich inderdaad nader zouden willen verdiepen in deze volgen enige opmerkingen betreffende onderstaande literatuurlijst.

Een bijzonder boeiend overzicht van (een deel van) de verzamelingentheoretische topologie is te vinden in [3]. Dit overzicht veronderstelt geen voorkennis en gaat uit van een elementair standpunt. Ook in [7] worden verschillende aspecten van de topologie helder uiteengezet. Een elementaire beschouwing speciaal over knopentheorie vindt men in [17].

Een eenvoudig en intuïtief leerboek is [2]. Er komen allerlei onderwerpen aan de orde, maar tegen de graad van exactheid valt wel eens bezwaar aan te tekenen. Iets dergelijks geldt, ofschoon in mindere mate, voor [16]; dit werk is minder intuïtief dan [2].

De werken [13] en [14] zijn helder en duidelijk geschreven leerboeken, die een verantwoorde inleiding geven in de verzamelingentheoretische topologie, zonder zich onmiddellijk te verliezen in zo groot mogelijke volledigheid of abstractie.

Onder de uitvoerige leerboeken [1], [4], [8], [9], [11], [12] vermelden we speciaal [9] als een goed en modern geschreven boek (zij het niet zonder een aantal fouten) en [11], een uitstekend boek, zij het niet gemakkelijk.

Voor een uitvoeriger literatuuroverzicht zij verwezen naar [9] en [11].

Verantwoording der figuren. De figuren 4, 6, 7 zijn ontleend aan [9]; de figuren 9 en 11 zijn genomen uit [7]; fig. 3 is ontleend aan [15], fig. 5 aan [3], fig. 8 aan [2] en fig. 10 aan [10].

Literatuur

1 P. S. Alexandroff en H. Hopf, Topologie I, Springer, Berlin, 1935.
2 B. H. Arnold, Intuitive concepts in elementary topology, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
3 R. H. Bing, Elementary point set topology, Herbert Ellsworth Slaught memorial papers 8, Mathematical Association of America, 1960.
4 N. Bourbaki, Topologie Générale, 6 fascicules. Hermann, Paris.
5 M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Palermo 22 (1906) 1-74.
6 M. Fréchet, Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel, Rend. Palermo 30 (1910), 1—26.
7 H. Freudenthal en W. Peremans, Zeven voordrachten over topologie, J. Noorduyn en Zoon N.V., Gorinchem, 1950.
8 F. Hausdorff, Grundzügen der Mengenlehre, Veit, Leipzig, 1914.
9 J. G. Hocking and G. S. Young, Topology, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1961.
10 L. Hogben, Mathematics in the making, Macdonald, London, 1960.
11 J. L. Kelley, General topology, Van Nostrand, New York, 1955.
12 C. Kuratowski, Topologie I, II, Warszawa, 1952.
13 M. J. Mansfield, Introduction to topology. Van Nostrand, Princeton, 1963.
14 B. Mendelson, Introduction to topology. Allyn and Bacon, Boston, 1962.
15 H. Tietze, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit I, II, C. H. Beck, München, 1959.
16 E. M. Patterson, Topology, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1956.
17 H. Rademacher and O. Toeplitz, The enjoyment of mathematics, Princeton University Press, Princeton, 1957.

BERICHTEN

MATHEMATISCH INSTITUUT DER RIJKSUNIVERSITEIT
BOOTHSTRAAT 1c, 6 en 17, UTRECHT

Gaarne vestigen wij Uw aandacht op de onderstaande colleges, die deze cursus speciaal voor leraren worden gegeven:

dinsdags 16.15 u. F. van der Blij (eerste semester).
H. Freudenthal (tweede semester).
Achtergronden van de Schoolwiskunde.
17.15 u. H. Freudenthal: Geschiedenis van de wiskunde.

Aanvang dinsdag 21 september 1965. De colleges vinden plaats in de collegezaal van Boothstraat 6.

Erratum.

Op blz. 241 van jaargang **40** moet op regel 11 $a = 0$ vervangen worden door $x = 0$ en op regel 12 $b = 0$ door $y = 0$.

P.W.

HET GETALBEGRIP BIJ BERNARD BOLZANO [1]).

door

B. VAN ROOTSELAAR

Amsterdam

Mijnheer de voorzitter,

Mijne Heren! Het is mij een grote vreugde te mogen spreken over het getalbegrip bij Bolzano, omdat de figuur Bolzano mij reeds in mijn jeugd door zijn geheimzinnigheid boeide. Bij het stillen van mijn leeshonger ontmoette ik herhaaldelijk de naam Bolzano, onder vermelding, dat deze of gene gedachte reeds bij hem te vinden of dat deze of gene stelling reeds door hem bewezen was — hoewel niet geheel correct. Daar kwam nog bij, dat Bolzano dan altijd een groot en scherpzinnig filosoof genoemd werd, wat in die tijd nog een bijzondere indruk op me maakte. Bolzano leefde in Tsjechoslowakije — ik kreeg de indruk, zo omstreeks 1830 — een land met een boeiende en ingewikkelde geschiedenis, waarin deze geheimzinnige Bolzano volgens mij zeer goed paste.

Wat mij het meest intrigeerde, was dat Bolzano andere wiskundigen met zijn vindingen ver voor geweest zou zijn, verder dat er over hem altijd slechts tamelijk vage beweringen geuit werden en tenslotte, dat hij wiskundige stellingen bewezen had, die niet helemaal in orde waren. Aan deze bewijzen haperde kennelijk iets, hoewel men blijkbaar niet precies kon zeggen wat dat was, want zo zakelijk werden de schrijvers van mijn boeken meestal niet.

Deze situatie was voor mij ronduit verbijsterend, want ik kon niet begrijpen, dat bij het bewijzen van wiskundige stellingen twijfel over de juistheid kon blijven bestaan. Immers, ik had uitsluitend tegenovergestelde ervaringen; mijn wiskundeleraar besliste altijd kordaat over het goed of fout van de oplossingen van de door mij gemaakte vraagstukken, en ik stelde mij zo voor, dat, indien je nu maar eenmaal wiskundige was, je dat zelf kon doen of indien je als filosoof iets bewees, dat er dan wel een wiskundige was, die even naging of het bewijs goed was. Daar kwam nog bij dat het voor mij raadselachtig was, dat een man, van wie men zei

[1]) Voordracht gehouden op de jaarvergadering van Wimecos, 29 dec. 1964 te Utrecht.

dat hij zo scherpzinnig was, onduidelijke bewijzen leverde.

Later heb ik een duidelijker begrip van de situatie gekregen, doch hoewel mijn inzicht in het wiskundige werk van Bolzano langzamerhand verbeterd is, heb ik met verbazing geconstateerd, dat de hoeveelheid zakelijke beschouwingen over dat werk betrekkelijk gering is gebleven, ondanks de lange tijd welke sedert zijn dood verlopen is. Om nauwkeurig te zijn: Bolzano leefde van 5 oktober 1781 tot 18 december 1848, laten we zeggen in Praag, waar hij geboren en gestorven is.

Tijdens zijn leven verscheen een niet onbelangrijk aantal werken: zijn *Beiträge* [1] [1]) in 1810, *Der binomische Lehrsatz* [2], met interessante arithmetische opmerkingen en stellingen over reële getallen in 1816, dan in 1817 zijn *Rein analytischer Beweis* [3], nl. van de stelling (van Weierstrass) dat een continue functie, die in de eindpunten van een interval waarden aanneemt met verschillend teken, ergens in het interval de waarde nul aanneemt. Verder een verhandeling over de lengte van krommen ([4], zie ook in [17]) en in 1837 zijn grote *Wissenschaftslehre* [5].

Zijn vriend F. Přihonsky zorgde voor de uitgave in 1851 van Bolzano's fraaie in 1847 begonnen werkje *Paradoxien des Unendlichen* [6], dat nadien herhaaldelijk herdrukt is. De resterende omvangrijke nalatenschap aan manuscripten van Bolzano bleef tot 1882 in handen van zijn leerling R. Zimmermann en kwam in 1892 in de nationale bibliotheek in Wenen. Daar werden ze kort na de eerste wereldoorlog door M. Jašek, een landgenoot van Bolzano, herontdekt [11] en bij stukjes en beetjes uitgegeven door K. Rychlík [7], [16].

Deze vertraging in de uitgave van Bolzano's manuscripten verklaart niet afdoende de onbekendheid met zijn werk op het gebied der analyse bij wiskundigen der vorige eeuw, want in het bijzonder zijn *Rein analytischer Beweis* [3] bevat behalve de in de titel genoemde stelling o.a. de opstelling van de algemene convergentievoorwaarde van Cauchy en de zogenaamde stelling van Bolzano-Weierstrass. Eerst nadat de problemen betreffende de fundering der analyse overwonnen waren zijn er blijken van belangstelling voor Bolzano's werk nl. van H. Hankel en H. A. Schwarz (in [17]), terwijl O. Stolz in 1881 een uitvoerige beschouwing [17] wijdt aan [3] en [4].

Het in 1930 door K. Rychlík gepubliceerde manuscript *Functionenlehre* bevat meer stellingen over continue functies, o.a. over

---

[1]) Getallen tussen vierkante haken verwijzen naar de literatuurlijst.

grootste en kleinste waarde, enz. In het bijzonder vindt men daarin een functie geconstrueerd, welke continu is in een gesloten interval en in de punten van een overal dichte deelverzameling geen eindig differentiaalquotiënt heeft. Ja, zoals K. Rychlík [13] en ook V. Jarník [8], die zich uitvoerig met de *Functionenlehre* hebben beziggehouden, hebben aangetoond, nergens differentieerbaar is.

De door M. Jašek herontdekte manuscripten van Bolzano bevatten echter meer, nl. een door K. Rychlík in 1957 aangekondigd en in 1962 uitgegeven manuscript [16], dat een theorie van het reële getal bevat. Het begint met de titel *Unendliche Grössenausdrücke* en is een onderdeel van Bolzano's *Grössenlehre*.

U kunt zich voorstellen, dat ik enthousiast begon te lezen toen ik het werkje toevalligerwijs in handen kreeg. Immers, ik had het vermoeden, dat mij duidelijk zou worden hoe Bolzano tot zijn fraaie resultaten op het gebied van de analyse gekomen was. In ieder geval verscheen hier een belangrijk onderdeel in Bolzano's functietheorie waarvan hij zelf zeker de mening was toegedaan, dat zijn in dit manuscript neergelegde beschouwingen fundamenteel waren. Dat dit fundament wankel was, zoals de uitgever opmerkte, verbaasde niet en was ook niet het meest interessante wat er aan op te merken was. Van belang was, dat hier een poging tot een zuiver arithmetische theorie van het reële getal gepresenteerd werd. De lectuur bleek boeiend en de theorie inderdaad onjuist, maar ook bleken verschillende commentaren en aanmerkingen (o.a. van Jarník in [10], p. 487, Rychlík en Rieger in [16]) niet steekhoudend.

Interessant is aan het manuscript, dat het licht werpt op de methode welke Bolzano tracht te volgen en op de specifieke begrippen welke hij daarbij opstelde.

In het volgende wil ik in het kort schetsen hoe Bolzano te werk is gegaan (uitvoeriger in [12]).

Bolzano begint met de invoering van het begrip oneindig getal, voorgesteld door een zogenaamde oneindige getaluitdrukking, d.i. een uitdrukking waarin een oneindige rij van elementaire rekenkundige bewerkingen wordt samengevat. Voorbeelden hiervan zijn:

$$1 + 2 + 3 + \ldots \text{ in inf.}$$
$$a + b/(1 + 1 + \ldots \text{ in inf.})$$
$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \text{ in inf.}$$

Men krijgt, uit de wijze waarop hij dergelijke uitdrukkingen hanteert de indruk, dat hij hierbij beschrijft wat we een rij van rationale getallen zouden noemen. Opgemerkt moet echter worden, dat hoe-

het begrensd zijn op een gesloten interval, het aannemen van een wel Bolzano natuurlijk de begrippen rij en reeks kent, hij de oneindige getaluitdrukkingen niet als zodanig benoemt. We zullen hierbij niet te lang stilstaan en gaan onmiddellijk over naar het volgende door Bolzano ingevoerde begrip, nl. dat van meetbaar getal.

Bolzano noemt de oneindige getaluitdrukking S meetbaar, als bij elk natuurlijk getal q een geheel getal p $(= p_q(S))$ („positive oder negative wirkliche Zahl, oder zuweilen auch eine Null") te vinden is, zodat

$$S = p/q + P_1 \text{ en } S = (p + 1)/q - P_2$$

is, waarbij P_1 en P_2 *positieve* getaluitdrukkingen zijn (P_1 evt. een nul).

Strikt genomen is deze definitie onbegrijpelijk, niet alleen omdat we nog niet goed weten wat een positieve getaluitdrukking is, maar ook omdat we nog niet goed kunnen zien, hoe we de gelijkheid moeten opvatten. Welnu, voor positieve getaluitdrukking blijkt de opvatting als (oneindige) rij rationale getallen, welke bijna alle positief zijn, zinvol, terwijl de opvatting van de gelijkheid als identiteit goede steun vindt in de wijze, waarop Bolzano met zijn uitdrukkingen werkt. Als positieve uitdrukkingen noemt hij o.a.:

$$b/(1 + 1 + \ldots \text{ in inf.})$$
$$1/q - b/(1 + 1 + \ldots \text{ in inf.})$$
$$[s \cdot (1 + 1 + \ldots \text{ in inf.}) - q \cdot b]/[q \cdot (1 + 1 + \ldots \text{ in inf.})]$$

De breuk $p_q(S)/q$ heet een metende breuk van S — wij zullen maar zeggen benaderende breuk — en de P_1, zodat $S = p/q + P_1$ heet de completering van p/q. In het bijzondere geval, dat $P_1 = 0$ („bloße Null"), heet p/q de volle maat van S.

Bolzano laat zien, dat de rationale getallen juist die meetbare getallen zijn, welke een volle maat bezitten, zodat blijkt, dat hij met een goede uitbreiding van het getalbegrip bezig is.

Voor de tellers van de benaderende breuken van een meetbaar getal S gelden de volgende eigenschappen:

$p_q(S)$ is eenduidig bepaald voor elke q en als $r > q$, dan is $p_r(S) \geqslant p_q(S)$.

Het is duidelijk, dat Bolzano spoedig oneindig kleine getallen introduceert. Daaronder verstaat hij (oneindige) meetbare getallen, waarvoor de tellers der naderende breuken alle nul zijn; dat zijn dan de positieve oneindig kleine getallen, de tegengestelden daarvan zijn de negatieve oneindig kleine getallen. Men kan deze begrippen inter-

preteren als positieve, respectievelijk negatieve nulrijen van rationale getallen. De som van twee oneindig kleine getallen van hetzelfde teken is weer een oneindig klein getal.

Bolzano ziet duidelijk in, dat hij niet zonder meer twee meetbare getaluitdrukkingen kan sommeren en dan beweren, dat het resultaat een meetbaar getal is, doch begint een uitvoerig bewijs voor de stelling, dat de som van twee meetbare getallen een meetbaar getal is. Het bewijs is fout, maar geeft tevens een bevestiging van de interpretatie van oneindige getaluitdrukking als rij rationale getallen.

Het doel van Bolzano is om voor zijn meetbare getallen de algemeen gebruikte rekenregels en ook de ordeningseigenschappen te bewijzen, om zo de grondslagen van de analyse te versterken. Hij weet wel, dat hij bij het vergelijken van meetbare getallen zal moeten afzien van oneindig kleine getallen en tracht als voorbereiding op zijn gelijkheidsdefinitie de situatie, dat het verschil van twee meetbare getallen oneindig klein is, te karakteriseren met behulp van het meetproces, d.w.z. het opstellen van de benaderende breuken.

Twee meetbare getallen worden gelijk genoemd, als ze dezelfde rij van benaderende breuken opleveren en Bolzano heeft dan reeds bewezen dat dit gelijkwaardig is met het oneindig klein zijn van het verschil. De methode is zorgvuldig en zuiver, de uitvoering faalt omdat de bewijzen onjuist zijn.

Is b.v. $A = 1$ en $J = 1/(1 + 1 + \ldots \text{in inf.})$, dan zijn A, J, $A - J$ alle meetbaar en J is oneindig klein. Er geldt echter $p_q(A) = q$, $p_q(J) = 0$, $p_q(A - J) = q - 1$ en dus $p_q(A) \neq p_q(A - J)$ voor alle q.

Bolzano beseft duidelijk, dat hij met iets subtiels bezig is en voorziet zijn definitie van een omstandige discussie. Hij tracht nl. een geschikte uitbreiding aan zijn begrippen te geven, zodat de theorie der gelijkheid (en van groter en kleiner) toepasbaar wordt op zijn oneindige getaluitdrukkingen. Na de definitie merkt hij op dat hij hiermede niet het begrip der gelijkheid zelf heeft uitgebreid, doch slechts de objecten waarop dit begrip betrekking heeft. Bolzano is hier zeer dicht bij een definitie door abstractie, doch kan de beslissende stap niet doen, omdat hij de situatie toch niet doorziet.

Opvallend is, dat hij na invoering van de relatie „groter dan" allerlei eigenschappen, waaronder

$$\text{als } A > B \text{ dan } A + C > B + C$$

bewijst, doch het analoge niet doet voor zijn gelijkheidsrelatie.

Het schijnt dat Bolzano hier slachtoffer is geweest van een verbalisme.

Een meetbaar getal is vergelijkbaar met een rationaal getal, d.w.z. voor elk meetbaar getal m en elk rationaal getal r geldt of $m < r$, of $m = r$, of $m > r$. De stelling echter, dat voor elke twee meetbare getallen A en B precies een van de betrekkingen $A = B$, $A > B$, $A < B$, geldt, is onjuist.

De fouten, welke Bolzano in zijn bewijs van deze stelling maakt zijn overigens opvallender dan zijn andere fouten en wekken enigszins verbazing.

Met deze stelling krijgen we ongeveer aansluiting bij de inhoud van zijn *Rein analytischer Beweis* en het lijkt daarom goed van een verdere bespreking af te zien.

We weten nu wel ongeveer wat we aan Bolzano hebben. Toch is dit geen reden om hem weer in de vergetelheid te laten verzinken. Integendeel er zijn tal van interessante vragen vanuit een meer historisch standpunt bezien, waarvan ik er enkele wil noemen.

Het schijnt dat Bolzano's manuscript over meetbare getallen stamt uit de jaren 1830—35. Het is echter niet denkbeeldig dat een belangrijk deel van het materiaal ouder is. Een nauwkeurige vergelijking met Bolzano's werk uit de periode 1810—1817 zou hier misschien enige opheldering kunnen verschaffen. Een naspeuren van het verband en de verschillen met het werk van tijdgenoten, alsmede een nauwkeurige vergelijking met de ontwikkeling van het getalbegrip bij andere wiskundigen uit de vorige eeuw beschouw ik als een interessante kwestie, die naar ik meen niet bevredigend is behandeld, en hierbij neem ik de verspreide historische beschouwingen over het getalbegrip in aanmerking.

Tenslotte is een nader onderzoek van de mathematische grond waarop Bolzano stond niet zonder belang.

In het kort komt mijn betoog hierop neer, dat naar mijn mening Bolzano als historisch onderwerp niet uitgeput is.

LITERATUUR

1. Bolzano, B. : Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. 1. Lief. Prag, 1810.
2. : Der binomische Lehrsatz und als Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher bewiesen. Prag. 1916.
3. : Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dasz zwischen je zwey Werthen, die einen entgegengesetztes Resultat gewähren,

wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. Prag. 1817.
4. : Die drei Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubirung ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahmen des Archimedes und ohne irgend eine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst, zugleich als Probe einer gänzlichen Umgestaltung der Raumwissenschaft allen Mathematikern zur Prüfung vorgelegt. Leipzig 1817.
5. : Wissenschaftslehre, Sulzbach 1837.
6. : Paradoxien des Unendlichen (ed F.. Přihonsky, Leipzig 1851).
7. : Functionenlehre (ed. K. Rychlík) Kön. Böhm. Ges. d. Wiss. B. Bolzanos Schriften 1, Prag. 1930.
8. Jarník, V. : O funkci Bolzanově. Časopis pěst. mat. fys. 51 (1922), 248–264.
9. : Bolzanova „Functionenlehre". Časopis pěst. mat. fys. 60 (1931), 240–262.
10. : Bernard Bolzano. Tsjechosl. M. J. 11 (86) (1961), 485–489.
11. Jašek, M. : Aus dem handschriftlichen Nachlass Bernard Bolzanos. Sitzber. Kön. Böhm. Ges. d. Wiss. Jahr 1920/21. Cl. II.
12. Rootselaar, B. van: Bolzano's theory of real numbers. Archive for History of Exact Sciences, 2(1964), 168–180.
13. Rychlík, K. : Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse. Sitzber. Kön. Böhm. Ges. d. Wiss. 1921/22.
14. : Theorie der reellen Zahlen im Bolzano's handschriftlichen Nachlasse. Tsjechosl. M. J. 7(82) (1957), 553–567.
15. : La théorie des nombres réels dans un ouvrage posthume manuscrit de Bernard Bolzano. Revue d'histoire des sciences, 14(1961), 313–327.
16. : Theorie der reellen Zahlen im Bolzanos handschriftlichen Nachlasse. Tsjechosl. Ak. Wiss. (Prag.), 1962.
17. Stolz, O. : B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. 18 (1881), 255–279.

BOEKBESPREKING

P. R. Garabedian, *Partial Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., New York/London/Sydney, 1964; 672 p. 105 sh.

Prof. Garabedian, verbonden aan het Courant Institute of Mathematical Sciences te New York, heeft een gedegen boek over partiële differentiaalvergelijkingen geschreven, dat enerzijds dient als studieboek voor hen, die zich in deze materie willen inwerken, en dat anderzijds door de behandeling van speciale onderwerpen als basis voor verdere onderzoekingen kan worden gebruikt. Van een hoogleraar van het Courant Institute behoeft het niet te verbazen dat hij ruime aandacht besteedt aan problemen, die voor fysici en ingenieurs van betekenis zijn. Zo komen de theorie van Hamilton-Jacobi, de Lorentztransformatie met de speciale relativiteitstheorie, de potentiaaltheorie met existentietheorema's en de niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen van de hydrodynamica aan de orde. Daarbij wordt ingegaan op aspecten, die uit wiskundig oogpunt interessant zijn, zoals op problemen in verband met begin- of randvoorwaarden.

Een afzonderlijk hoofdstuk is aan de differentiaalvergelijkingen gewijd, als leidraad voor het zoeken naar numerieke oplossingen. De auteur verwaarloost bij zijn behandeling de mathematische problemen niet; existentie- en uniciteitstheorema's krijgen hun plaats, waarbij de nadruk op constructieve methoden wordt gelegd. De auteur aarzelt niet om in sommige gevallen onnodig strenge voorwaarden op te leggen, teneinde de behandeling doorzichtiger te kunnen maken. In een slothoofdstuk wordt aandacht besteed aan de theorie over analytische partiële differentiaalvergelijkingen in het complexe vak.

Wie zich op de hoogte wil stellen van een belangrijk gebied van wiskundig onderzoek, dat voor allerlei toepassingen in natuurwetenschappen en techniek van grote betekenis is, vindt in dit boek van Garabedian een uitstekende gids.

W. J. Claas

V. I. Zubov, *Methods of A. M. Lyapunov and their application*, Translation prepared under the auspices of the U.S.A.E.C., Groningen, 1964

De methoden van Lyapunov hebben betrekking op het onderzoek naar stabiliteit van bewegingen. In de taal van de differentiaalvergelijkingen geformuleerd bestudeert men het stelsel ($x \in R^n$, $t \in R$)

$$dx/dt = f(x, t).$$

Laat $x = \varphi_0(t)$ een vaste oplossing zijn. Deze heet Lyapunov-stabiel als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat voor iedere andere oplossing $x = \varphi_1(t)$ met $||\varphi_0(0) - \varphi_1(0)|| < \delta$ geldt $||\varphi_0(t) - \varphi_1(t)|| < \varepsilon$ voor alle $t \geqq 0$. Geldt bovendien nog $\lim_{t\to\infty} ||\varphi_0(t) - \varphi_1(t)|| = 0$, dan spreekt men over asymptotische L-stabiliteit. Grof gezegd is een beweging L-stabiel wanneer een kleine verstoring van de beginpositie geen grote gevolgen op de beweging heeft.

Deze studie begint met een uitvoerig onderzoek naar invarianten gebieden (systemen van trajectorieën) van een dynamisch systeem in een metrische ruimte. Deze algemene theorie wordt in volgende hoofdstukken toegepast op de gewone en partiële differentiaal vergelijkingen.

F. van der Blij

P. S. Alexandroff, *Introduction à la Théorie des groupes*, uit het Duits vertaald door dr. A. Gloden, Dunod-Paris 1965, 126 blz., F.Fr. 13.—

Om vertrouwd te raken met de beginselen van de groepentheorie, is een inleiding in de theorie van groepen van eindige orde uitermate geschikt, omdat speciale wiskundige kennis, boven die van het leerplan van het middelbaar onderwijs, niet vereist wordt.

In dit boekje wordt feitelijk de additieve notatie consequent toegepast, zodat de operaties steeds van links naar rechts dienen te worden uitgevoerd.

Reeds in de eerste hoofdstukken maakt men kennis met groepen van de orde 3 (een cyclische dus), de viergroep van Klein, die als abstracte groep wordt uitgevoerd en later als isomorf met de rotatiegroep van de ruit wordt onderkend en een cyclische groep van de orde 4 (al deze voorbeelden dus abelse groepen).

Na een behandeling van permutaties, waarbij het functiebegrip onder de loep wordt genomen, ontstaat de symmetrische groep S, van de orde 6, de eerste nietcommutatieve groep waarmee men kennis maakt.

Hierna volgt de behandeling van de isomorfie en de stelling van Cayley. Persoonlijk geef ik de voorkeur aan een vroegere behandeling van de stelling van Lagrange, die nu ver naar achteren geschoven, te weinig toepassing vindt. Onderzocht worden de tetraëdergroep (orde 12) de octaëdergroep (orde 24) en heel kort de icosaëdergroep (orde 60).

Geconjugeerde elementen en geconjugeerde ondergroepen voeren dan tot de invariante ondergroepen. Nu kan de homomorfie aan de orde komen. Dan volgt de behandeling van linker en rechter nevenklassen van een ondergroep (Lagrange, index van een groep), terwijl in een aanhangsel een korte inleiding in de leer der verzamelingen en een m.i. niet geheel correct bewijs van de stelling, dat een alternerende groep waarvan de orde groter is dan 4, geen echte normaaldelers heeft.

Al met al een boekje, dat men een belangstellende leerling uit de hoogste klas, gerust ter bestudering kan aanbevelen.

Burgers

Dr. J. E. Cigler, *Enige aspecten van de wiskundige begripsvorming*; Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de abstracte analyse aan de Rijksuniversiteit te Groningen, *f* 1.90, J. B. Wolters, 1965.

Prof. Cigler probeert — naar zijn eigen zeggen — een bescheiden indruk te geven van de aard der ontwikkeling van de wiskunde. Hij doet dat op geslaagde wijze aan de hand van een drietal voorbeelden:

1. De ontwikkeling, die van de inhoudsbepaling tot de maat- en integratietheorie van Lebesque heeft geleid
2. De uitbreiding van het getalbegrip, die door de uitbouw van de verzamelingenleer nodig werd.
3. Het begrip Hilbertruimte.

Men kan zich afvragen of the universitaire traditie van de inauguratierede nog veel zin heeft; voor welk publiek heeft de inhoud betekenis? Voor de wiskundigen weinig, voor de niet-wiskundigen ook weinig. Prof. Cigler voelt dat goed aan en beperkt zich wijselijk. Vandaar dat naar mijn gevoel de slotzin de belangrijkste is: „Ik zou graag ieder jaar een college geven, dat u — de studenten — tot aan de grenzen van het moderne wiskundeonderzoek zal leiden". Dat houdt een program in.

Mij trof de uitspraak „want de wiskunde wordt zeer vaak als een tweederangswetenschap beschouwd, . . .". Mij past een bescheidenheid t.a.v. dit hooggeleerd standpunt, die ik graag in acht neem; ik wil echter best laten doorschemeren, dat ik denk, dat het nog wel wat meevalt. De term „tweederangswetenschap" wordt naar mijn mening niet of weinig gebruikt in dit geval — zelfs niet bij de *wel* veel voorkomende antipathie tegen de wiskunde, om van aversie niet te spreken.

Groenman

S. M. Ulam, *Problems in Modern Mathematics*, Science Editions, New York, 1964

Het „Scottish Book" was een groot aantekenboek beheerd door de ober van het Schotse koffiehuis in Lwów. De aantekeningen begonnen in 1935 door S. Banach met een reeks onopgeloste problemen. Tot 1941 werden er door de wiskundige bezoekers van het koffiehuis problemen in geschreven. In 1946 werd een nieuw Schots boek begonnen, nu in Wroclaw waarin opnieuw een reeks onopgeloste problemen verzameld werden.

De geest van deze opgaven verzamelingen, beter te vergelijken met de jaarlijkse prijsvragen van het Wiskundige Genootschap, dan met de „Opgaven" vinden we terug in dit problemenboek van S. M. Ulam.

In tegenstelling tot de stijl van losse aantekeningen in de Schotse Boeken vinden we hier een beredeneerd verhaal over verschillende gebieden van de wiskunde, doorspekt met een groot aantal onopgeloste problemen.

De hoofdstukken zijn achtereenvolgens: Verzamelingenleer, algebraïsche problemen, metrische ruimten, topologische ruimten, topologische groepen, analyse, natuurkundige stelsels en tenslotte wat voorstellen om rekentuig te benutten, o.a. als heuristisch hulpmiddel bij uiteenlopende problemen.

Deze „paperback" uitgave, verschenen 4 jaar na de eerste uitgave, moest met een voorwoord aangevuld worden waarin de problemen vermeld worden, die ondertussen opgelost zijn. Om het boek op peil te houden voegde de auteur gelijk weer enkele nieuwe problemen toe . . .

Het is boeiende en prikkelende lectuur en, hoewel de meeste problemen niet zo oppervlakkig simpel lijken als de klassieke onopgeloste problemen uit de getaltheorie b.v., bevat dit boek een groot aantal goed overwogen, niet te moeilijk lijkende problemen, die meestal bij nader inzien toch moeilijk te kraken noten zijn. Onze belangstelling gaat uit naar het voorwoord van een editie over 4 of over 40 jaar, aan prognoses over aantal dan opgeloste problemen zullen we ons niet wagen!

Toch geloven we dat er regelmatig van deze problemen opgelost zullen worden, sommige door de typische „problem-solvers", die met ingenieuze artistieke methoden een probleem ad hoc oplossen, andere als bijprodukten (corrolaries of opgaven) van abstracte theorieën, opgesteld door de grote planologen in het wiskundige onderzoekingsveld.

F. van der Blij

J. de Kimpe, *Stellingen Vlakke Meetkunde*, Polygoon-diaserie no. 280, prijs?

Op 25 dia's zijn 97 stellingen door fraaie figuren en een minimum aan tekst aangeduid. In het bijbehorende tekstboekje zijn deze stellingen in schemavorm vermeld. De dia's zijn geschikt om bij daglicht geprojecteerd te worden. Op een lichte muur krijgt men al duidelijke beelden. Jammer is, dat geen kleuren zijn gebruikt; maar misschien is dit technisch niet mogelijk in verband met bovengenoemde mogelijkheid van projectie bij daglicht. Aan een bepaalde volgorde is niet streng de hand gehouden, lezen we in het tekstboekje. Enerzijds is dat te begrijpen: de serie wil waarschijnlijk niet teveel bij een bepaald boek aansluiten. Anderzijds vond ik het storend, dat stellingen die bij elkaar horen, niet bij elkaar staan (bijv. de stellingen over parallellogram, rechthoek, ruit). Enkele stellingen leken me overbodig: de formules voor hoogtelijn, bissectrice en zwaartelijn en de s-formule zijn uit de tijd, dacht ik. De formulering „tg 90° = bestaat niet" (in het tekstboekje) is vreemd. Maar dit zijn slechts kleinigheden.

Volgens de toelichting kunnen de dia's worden gebruikt om de parate kennis van behandelde onderwerpen op peil te houden (maar dan gaat de volgorde een rol spelen!), om te repeteren in een examenklas, om stellingen schriftelijk te overhoren, als uitgangspunt voor een klassegesprek, enz. Er zijn scholen, waar de leerlingen in de bovenbouw niet meer de beschikking hebben over een planimetrieboek. Ik meen, dat deze diaserie daar goede diensten kan bewijzen.

D. Leujes

J. de Kimpe, *Eindexamen vraagstukken Stereometrie* 1964 *Gymnasium β — H.B.S-B*, Polygoon-diaserie no. 281.

Ook deze dia's zijn geschikt voor daglichtprojectie. De figuren zijn bijzonder duidelijk, al miste ik hier de kleuren nog meer dan bij de vorige serie; de bewijzen zijn overzichtelijk. Bij het bekijken van deze dia's (met een examenklas) rees echter de vraag: is hier behoefte aan? Tijdbesparend bleek het nauwelijks te zijn en men mist het voordeel van het zien ontstaan van een tekening. Alleen, als men even gauw de oplossing van deze vraagstukken wil laten zien, zou men enkele van deze 25 dia's kunnen gebruiken. Een voordeel is dan, dat de leerlingen een complete (en keurige!) oplossing voor zich zien.

D. Leujes

WIMECOS

De leden van Wimecos wordt verzocht hun Contributie voor **1965-1966** ten bedrage van f 9,— (inclusief toezending van Euclides) te storten of over te schrijven op postrekening **143917** t.n.v. Wimecos te Amsterdam; leden, die Euclides op andere wijze ontvangen wordt verzocht hun contributie ten bedrage van **f 3,50** over te maken.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

140. Probleem 138 was bedoeld als inleiding tot een puzzel door Prof. Dr. N. G. de Bruyn opgegeven in zijn college tijdens de heroriënteringscursus voor wiskundeleraren over topologie [1]).

Men gaat uit van een fietsband, dus van een torus met binnen- en buitenwand. Op de buitenwand van de torus tekent men een rode meridiaan en op de binnenwand een blauwe breedtecirkel. Het is duidelijk, dat deze twee cirkels als schakels van een ketting in elkaar grijpen.

Men maakt een gat in de band door b.v. het ventiel eruit te snijden. Nu haalt men de gehele band als het ware door het gat naar buiten. De band wordt dus binnenste buiten gekeerd. Daarna plakt men het gat weer dicht. Men verkrijgt nu een torus met een rode meridiaan op de binnenwand en een blauwe breedtecirkel op de buitenwand. Deze cirkels grijpen echter niet meer als schakels in elkaar, maar liggen los van elkaar.

Door een deformatie in de ruimte is het echter niet mogelijk twee schakels van een ketting uit elkaar te halen. Waar is in de redenering een fout gemaakt?

Opmerking. Men moet niet te lichtvaardig teruggrijpen naar het vorige probleem. Daar was sprake van een homeomorfisme tussen twee torussen in een driedimensionale ruimte. De oorspronkelijke torus en de beeldtorus waren echter niet door deformatie in elkaar over te voeren. In de nu gestelde opgave is daarentegen van een deformatie sprake.

---

[1]) De opgave komt voor in Martin Gardness, The Scientific Book of Mathematical Puzzles & Diversions, New York 1959, p. 146—147.

141. Vind natuurlijke getallen a en b, waarvoor geldt

$$a + b \text{ is een kwadraat}$$

en

$$a^2 + b^2 \text{ is een kwadraat.}$$

(B. Kootstra)

OPLOSSINGEN
(zie voor de opgaven het vorige nummer)

138. Een torus is homeomorf met een vierkant $ABB'A'$, als men de punten van AB met die van $A'B'$ identificeert en bovendien de punten van AA' met die van BB' identificeert. Deze identificatie kan men zich in de ruimte zo voorstellen, dat men eerst van het vierkant een cilinder maakt door de randen AB en $A'B'$ aan elkaar te lijmen en daarna van deze cilinder een torus door nu de randen (cirkels) AA' en BB' aan elkaar te lijmen. De lijnen in het vierkant parallel met AB worden dan de breedtecirkels en die parallel met AA' de meridianen.

Men kan ook het vierkant in een torus doen overgaan door eerst AA' en BB' aan elkaar te lijmen en daarna AB en $A'B'$. Dan gaan de lijnen parallel met AB over in meridianen en die parallel met AA' in breedtecirkels.

Begint men met een torus en voert men eerst de inverse van de eerstgenoemde transformatie (torus → vierkant) en daarna de tweede transformatie (vierkant → torus) uit, dan zijn de beide soorten cirkels verwisseld.

Opmerking. Men zou het paradoxale resultaat kunnen „verklaren" door op te merken, dat voor een beschouwer van de torus in de driedimensionale ruimte de beide soorten cirkels verschillend zijn, maar dat voor een torusbewoner er tussen beide soorten met topologische middelen geen verschil te vinden is.

139.
$$\overline{abc} = ax^2 + bx + c$$
$$\overline{cab} = cx^2 + bx + a,$$

dus

$$\overline{pqr} = (a - c)x^2 + 0x + (c - a).$$

Omdat $c - a < 0$, bestaat dit laatste getal uit de „cijfers" $a - c - 1$, $x - 1$, $c - a + x$. Dus is

$$\overline{pqr} = (a - c - 1)x^2 + (x - 1)x + c - a + x$$
$$\overline{rqp} = (c - a + x)x^2 + (x - 1)x + a - c - 1.$$

Optelling geeft

$$\overline{pqr} + \overline{rqp} = (x + 1)^2(x - 1).$$

Dus is

$$(x + 1)^2(x - 1) = 111555(x + 1),$$

waaruit men vindt, dat $x = 334$.

Dr. C. J. VOOYS.

Op 13 augustus is overleden Dr. C. J. Vooys, die een tiental bijdragen, alle op historisch gebied, voor ons blad afstond. Zijn laatste artikel werd in het vorige — septembernummer — afgedrukt. Het was de redactie niet bekend dat Dr. Vooys toen reeds was overleden.